# Feuille d'Exercices VII
# Calcul Stochastique

**Exercice 1.** Soit $B$ un mouvement brownien standard et soit

$$M_t = (B_t + t)\mathrm{e}^{-\left(B_t + \frac{1}{2}t\right)}.$$

1. Calculer $\mathrm{d}M_t$ avec la formule d'Itô.
2. Montrer que $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale.

**Exercice 2.** Soit $B$ un mouvement brownien standard et soit

$$Y_t = tB_t - \int_0^t B_u \mathrm{d}u.$$

1. Montrer que $Y_t$ est une martingale et que $\mathbb{E}[Y_t^2] = \frac{t^3}{3}$.
2. Montrer que $(Z_t)_t$ est une martingale avec
$$Z_t = \mathrm{e}^{Y_t - \frac{t^3}{6}}.$$

**Exercice 3.** De la théorie de l'analyse complexe on sait que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe satisfait les conditions de Cauchy–Riemann: si on écrit $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ alors on a

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{et} \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

1. Montrer que $u$ et $v$ sont harmoniques en utilisant les conditions de Cauchy–Riemann. Quelles fonctions harmoniques obtenez-vous des parties réelles et imaginaires de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ et $z \mapsto z\mathrm{e}^z$?
2. On considère la famille d'hyperboles
$$H(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 - y^2 = \alpha\}.$$
En utilisant la partie réelle et imaginaire de $z \mapsto z^2$, calculer la probabilité qu'un mouvement brownien en deux dimensions commençant en $(2,0)$ atteigne $H(1)$ avant d'atteindre $H(5)$.

**Exercice 4.** Soit $B$ un mouvement brownien standard et $Z = \int_0^T B_s \mathrm{d}s$.

1. Calculer $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$.
2. Calculer $\mathrm{d}M_t$ et trouver un processus $X \in \mathcal{H}^2([0,T])$ tel que $Z = \int_0^T X_s \mathrm{d}B_s$.
3. Trouver un processus $X \in \mathcal{H}^2([0,T])$ tel que
$$\int_0^T B_s^2 \mathrm{d}s = \frac{T^2}{2} + \int_0^T X_s \mathrm{d}B_s.$$

**Exercice 5.** Nous allons voir un exemple de martingale locale bornée dans $L^2$ qui n'est pas une vraie martingale. Soit $\vec{B}$ un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que la fonction $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ est une fonction harmonique pour tout $(x,y,z) \neq 0$, et ainsi $M_t = f(\vec{B}_t)$ est une martingale locale pour $1 \leqslant t \leqslant \infty$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[M_t^2] = \frac{1}{t}$ pour tout $1 \leqslant t < \infty$.
3. Utiliser la question précédente et l'inégalité de Jensen pour montrer que $M_t$ n'est pas une martingale.

Shizuo Kakutani
(1911–2004)

Paul-André Meyer
(1934–2003)